Следующий пример позволит обсудить несколько аспектов цели нашего проекта. Рассмотрим пять возможных выражений для одного и того же интеграла:

$$\begin{aligned}\int \sqrt{2\tan x}\,dx = {} & -\tfrac{1}{2}\ln\left(2-2\tan x-2\sqrt{2\tan x}\right) \\ & -\arctan\left(\sqrt{2\tan x}-1\right) \\ & +\tfrac{1}{2}\ln\left(2-2\tan x+2\sqrt{2\tan x}\right) \\ & -\arctan\left(\sqrt{2\tan x}+1\right); \end{aligned} \tag{1}$$

$$\int \sqrt{2\tan x}\,dx = \tag{2}$$

$$\begin{aligned} & \frac{\sqrt{\mathrm{Tan}[x]}}{2\sqrt{\mathrm{Tan}[x]}}\Big(-2\mathrm{ArcTan}\Big[1-\sqrt{2}\sqrt{\mathrm{Tan}[x]}\Big] \\ & +2\mathrm{ArcTan}\Big[1+\sqrt{2}\sqrt{\mathrm{Tan}[x]}\Big] \\ & +\mathrm{Log}\Big[1-\sqrt{2}\sqrt{\mathrm{Tan}[x]}+\mathrm{Tan}[x]\Big] \\ & -\mathrm{Log}\Big[1+\sqrt{2}\sqrt{\mathrm{Tan}[x]}+\mathrm{Tan}[x]\Big]\Big); \end{aligned} \tag{3}$$

$$\begin{aligned} & = \ln\cos x+\ln(1+\sqrt{2\tan x}-\tan x) \\ & \quad +\arctan\frac{1+\tan x}{\sqrt{2\tan x}}; \end{aligned} \tag{4}$$

$$= -\arctan\frac{\sqrt{2\tan x}}{1+\tan x}+\operatorname{arctanh}\frac{\sqrt{2\tan x}}{1-\tan x}; \tag{5}$$

$$= \arctan\frac{1+\tan x}{\sqrt{2\tan x}}+\operatorname{arctanh}\frac{1-\tan x}{\sqrt{2\tan x}}. \tag{6}$$

Выражение (1) получено в Maple 16; выражение (3) получено в Mathematica 8; выражения (4) – (6) получены в рамках нашего подхода. Рассмотрим эти выражения с точки зрения сформулированных критериев.

2.1. Корректность

Обозначим через f и F подынтегральное выражение и первообразную. Проверка равенства $F' = f$ требует дифференцирования. В компьютерной алгебре существуют давние разногласия по поводу выбора из двух возможностей

$$\int \frac{dx}{x} = \begin{cases} \ln x; & \text{комплексный случай;} \\ \ln|x|; & \text{вещественный случай.} \end{cases} \tag{7}$$

В репозитории все правила преобразований верны для комплексного случая. В нашем примере подынтегральная функция становится чисто мнимой на интервалах $(n\pi; n\pi+\pi/2)$, где $n \in \mathbb{Z}$.

Отметим, что проверка равенства $F' = f$, основанная на использовании какой-то системы компьютерной алгебры, может быть нетривиальной задачей. Например, Maple не может полностью проверить (4).

Последние три выражения в нашем примере, очевидно, короче и проще, чем первые два. Постоянная проблема систем компьютерной алгебры — рост размера выражений. Системы компьютерной алгебры очень часто не дают максимального упрощения выражений, которые содержат интегралы. Во-первых, по-

2.4. *Эстетика*

> Красота — важнейший критерий. Уродству нет места в математике. (Г.Х. Харди [3])

Сравнивая (4) и ( ), мы видим, что ( ) содержит две родственные функции: arctan и arctanh. Хотя arctanh можно выразить через логарифмы, выражение ( ) с его симметриями математически красивее, чем остальные выражения.

Аналогичный принцип касается связи между формами подынтегрального выражения и интеграла. Следующий интеграл был получен с помощью MAPLE 1 :

$$\int \sqrt{2\tan x}\,dx = \frac{\sqrt{\tan x}\cos x \arccos(\cos x - \sin x)}{\sqrt{\cos x \sin x}} - \ln\left(\cos x + \sqrt{2}\sqrt{\tan x}\cos x + \sin x\right). \quad (10)$$

В отличие от (1), полученного тоже с помощью MAPLE, эта формула содержит целый набор функций, не входящих в подынтегральное выражение. Кроме того, связывающая проблемы (1) и (10) очевидная симметрия $x \to -x$ не видна в ответах.

Мы предпочитаем в таких случаях формулу, которая функционально ближе к подынтегральному выражению.

2. . *Использование*

Способ записи правил отражается на каждом шаге при пошаговом выполнении. Некоторые системы используют многочисленные подстановки в процессе решения. Это отражает то, как человек решал бы эту задачу, но такой подход труден для восприятия, так как пользователю придется следить за всеми заменами. Простым примером является интеграл вида $\int f(ax+b)\,dx$. Хотя человек может сразу написать $y = ax + b$, а затем работать с y, мы предпочитаем работать с более длинной формой и освободить пользователей от необходимости следить за заменами.

3. ФОРМА ПРАВИЛ

Каждая запись в репозитории состоит из трех функциональных частей, в совокупности они определяют правило:

1. Преобразование. Отображает интеграл в выражение, которое содержит как термы, свободные от интегралов, так и новые (более простые) интегралы.

2. Условия достоверности. (Так как интегралы в части 1 обычно содержат параметры, эти условия обеспечивают корректность преобразований.)

3. Условия упрощения. Подтверждают, что преобразование является желательным, и что любой новый интеграл или интегралы после дальнейших преобразований приведут к решению исходной проблемы.

Записи могут содержать и не имеющие функциональной роли сведения, такие, как ссылки на литературу.

Одна из задач нашего проекта — добиться того, чтобы условия, определяющие правила, взаимно исключали друг друга. Это означает, что если заданы все параметры для любого подынтегрального выражения, то только один набор условий оказывается выполненным, и, таким образом, только одно правило может быть применено.

Одним из стандартных подходов к таким интегралам, используемых другими системами, является замена $u = \tan(c + dx)$. Удаляются все тригонометрические функции, в итоге возникает квазирациональная функция от u. Другая подобная замена — замена Вейерштрасса $u = \tan((c + dx)/2)$, но мы ее не используем. С математической точки зрения она приводит к проблеме обратимости преобразования, так как арктангенс имеет точки ветвления. С программной точки зрения такая замена снижает независимость модуля. Кроме того, сформулированный ранее эстетический принцип означает, что мы стараемся использовать те функции, которые уже входят в подынтегральное выражение. Это относится как к промежуточным выводам, так и к окончательному выражению.

Двенадцать преобразований (рекурренций), перечисленных в приложении, используются для рекуррентного приведения подынтегрального выражения к форме, для которой интеграл известен. Приведем пример применения правил.

5. ПРИМЕР РЕДУКЦИИ

Чтобы сосредоточиться на главной идее, мы положим некоторые константы в подинтегральном выражении равными нулю (см. последний раздел предыдущей секции) и рассмотрим интеграл:

$$\int \tan(1 + i + x)$$

правил. Например, в системе MATHEMATICA $(\sin(c+dx))^{-1}$ имеет внутреннее представление $\csc(c+dx)$, и $\tan(c+dx)^{-1}$ — внутреннее представление $\cot(c+dx)$. Таким образом, надо уметь работать и с тангенсом, и с котангенсом (другие модули должны содержать записи для синуса и косеканса). Система, которая хранит обратные функции по-другому, возможно, потребует изменения базы данных.

Во-вторых, система влияет на репозиторий через упрощение. Мы уже отмечали, что некоторые алгебраические упрощения записаны в нашей системе как правила преобразования, так как в противном случае встроенный в систему способ упрощения уничтожил бы шаблон, предпочтительный для нас. Невозможность объяснить системе наши требования заставляет нас включать алгебраические упрощения в наш репозиторий, что существенно увеличивает его размер.

7. ПРИЛОЖЕНИЕ

Перечислим рекурренции, используемые в схеме интегрирования [10]. Для экономии места будем использовать обозначения

$$T_1 = \tan(c+dx)\,; \qquad T_2 = a + b\tan(c+dx)\,;$$
$$T_3(A,B,C) = A + B\tan(c+dx) + C\tan^2(c+dx)\,.$$

Следующие рекурренции справедливы для всех $A, B, C \in \mathbb{C}$:

$$d(m+1)\int T_1^m T_2^n T_3(A,B,C)\,dx = \tag{17}$$
$$A T_1^{m+1} T_2^n + d\int T_1^{m+1} T_2^{n-1} T_3(\hat{A},\hat{B},\hat{C})\,dx\,;$$

$$\hat{A} = aB(m+1) - Abn\,;$$
$$\hat{B} = (bB - aA + aC)(m+1)\,;$$
$$\hat{C} = bC \qquad)\,dx\mathrm{C}$$

$$d(m+n)\int T_1^m T_2^n T_3(A;B;0)\,dx = \tag{24}$$
$$BbT_1^{m+1}T_2^{n-1} + d\int T_1^m T_2^{n-1} T_3(\hat{A};\hat{B};0)\,dx\,;$$
$$\hat{A} = Aa(n+m) - Bb(m+1)\,;$$
$$\hat{B} = Ba(n-1) + (Ab+Ba)(m+n)\,.$$

$$2a^2nd\int T_1^m T_2^n T_3(A;B;0)\,dx = \tag{25}$$
$$BbT_1^m T_2^n + d\int T_1^{m-1} T_2^{n+1} T_3(\hat{A};\hat{B};0)\,dx\,;$$
$$\hat{A} = (Ab - Ba)m\,;\quad \hat{B} = Bb(m-n) + Aa(m+n)\,.$$

$$2a^2nd\int T_1^m T_2^n T_3(A;B;0)\,dx = \tag{26}$$
$$a(aA+bB)T_1^{m+1}T_2^n + d\int T_1^m T_2^{n+1} \hat{T}_3(\hat{A};\hat{B};0)\,dx\,;$$
$$\hat{A} = bB(m+1) + aA(m+2n+1)\,;$$
$$\hat{B} = (aB - Ab)(m+n+1)\,.$$

$$ad(m+n)\int T_1^m T_2^n T_3(A;B;0)\,dx = \tag{27}$$
$$aBT_1^m T_2^n + d\int T_1^{m-1} T_2^n \hat{T}_3(\hat{A};\hat{B};0)\,dx\,;$$
$$\hat{A} = -aBm\,;\quad \hat{B} = Aam + (Aa - Bb)n\,.$$

$$ad(m+1)\int T_1^m T_2^n T_3(A;B;0)\,dx = \tag{28}$$
$$aAT_1^{m+1}T_2^n + d\int T_1^{m+1} T_2^n \hat{T}_3(\hat{A};\hat{B};0)\,dx\,;$$
$$\hat{A} = Abn - Ba(m+1)\,;\quad \hat{B} = Aa(m+n+1)\,.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. B. Buchberger. Mathematica as a Rewrite Language. In T. Ida, A. Ohori, and M. Takeichi, editors, *Functional and Logic Programming (Proceedings of the 2nd Fuji International Workshop on Functional and Logic Programming, November 1-4, 1996, Shonan Village Center)*, pages 1–13. Copyright: World Scientific, Singapore - New Jersey - London - Hong Kong, 199 .

2. Richard J. Fateman. A review of Mathematica. *J. Symb. Computation*, 13(5):545–579, 1992.

3. G. H. Hardy.